DE LA
RÉFRACTION DE LA LUMIERE
EN PASSANT PAR L'ATMOSPHÈRE SELON
LES DIVERS DEGRÉS TANT DE LA CHALEUR QUE DE L'ELASTICITÉ DE L'AIR.

PAR M. EULER.

I.

Pour déterminer la réfraction, que les rayons de la lumiere ſouffrent en paſſant par l'Atmoſphère, il faut commencer par la réfraction, que les rayons de la lumiere ſouffrent en paſſant du vuide dans un air d'une denſité donnée: car il eſt certain que cette réfraction dépend de la denſité de l'air, dans lequel les rayons entrent du vuide. Or comme les rayons, qui ſont de diverſes couleurs, ſouffrent des réfractions differentes, je conſidère ici ſeulement les rayons d'une telle nature moyenne, qui eſt également eloignée de ceux, qui ſubiſſent ou la plus grande, ou la plus petite réfraction : car c'eſt par rapport à ces rayons moyens, que les Aſtronomes ſont accoutumés de dreſſer leurs tables de réfraction.

II. Conſidèrons donc une maſſe d'air dont la denſité ſoit fixe, & à laquelle je comparerai enſuite les divers degrès de denſité, que l'air puiſſe avoir, & que cette denſité ſoit $= c$. Que $1 : \alpha$ marque la raiſon du ſinus d'incidence à celui de réfraction pour les rayons, qui

entrent du vuïde dans cet air. Les Expériences qu'on a faites ſur cette réfraction, ont fait voir, que la raiſon $1 : \alpha$ eſt à peu près comme 3325 à 3324, & partant $\alpha = \frac{3324}{3325}$: mais comme la denſité de l'air n'eſt pas marquée aſſés exactement, je regarderai la valeur de α comme inconnuë, quoiqu'elle ne ſauroit différer conſidèrablement de $\frac{3324}{3325}$, lorsque c marque la denſité de l'air, telle qu'elle eſt ordinairement.

III. Il eſt auſſi clair, que ſi les rayons paſſoient de cet air, dont la denſité $= c$, dans un autre air d'une denſité double $2c$, ils ſouffriroient la même réfraction. D'où il s'enſuit, que ſi les rayons paſſent immédiatement du vuide dans l'air de la denſité $2c$, la raiſon de réfraction ſera $1 : \alpha\alpha$, ou doublée de la raiſon $1 : \alpha$. Donc, lorsque les rayons paſſent du vuide dans un air de la denſité nc, le ſinus d'incidence ſera à celui de réfraction, comme $1 : \alpha^n$. De ſorte que ſi q marque une denſité quelconque de l'air, poſant $n = \frac{q}{c}$, la raiſon de réfraction des rayons, qui entrent du vuide dans cet air, ſera comme $1 : \alpha^{\frac{q}{c}}$.

IV. Donc, ſi nous avons deux maſſes d'air, dont la denſité de l'une ſoit $= q$, & de l'autre $= r$, & que les rayons paſſent de la premiere dans la ſeconde, la raiſon du ſinus d'incidence à celui de réfraction ſera $\alpha^{\frac{q}{c}} : \alpha^{\frac{r}{c}}$. Car on n'a qu'à concevoir un vuide infiniment mince entre ces deux maſſes d'air, & la raiſon de réfraction du premier air q dans le vuide étant $\alpha^{\frac{q}{c}} : 1$, & du vuide dans l'autre air r comme $1 : \alpha^{\frac{r}{c}}$, la raiſon de réfraction du premier air dans l'autre ſera $\alpha^{\frac{q}{c}}$ à $\alpha^{\frac{r}{c}}$.

V.

V. Soit maintenant EOF la ſurface de la terre, & C ſon centre, le rayon $CO = a$; & que l'atmoſphère ſoit conſidérée comme compoſée des couches ſphériques décrites du centre C, & on pourra ſuppoſer que les denſités de l'air en montant diminuent ſelon ces couches, de ſorte qu'en chaque couche comme PM, la denſité ſoit partout la même. Poſant donc pour une couche quelconque PM, le rayon $CP = x$, ſoit la denſité de cette couche $= q$; & la denſité à la ſurface de la terre ou en $O = k$; qui peut varier ſelon les divers degrés de chaleur & de l'elaſticité de l'air.

VI. Que l'Obſervateur ſoit maintenant en O, auquel parvienne un rayon OMS, courbé par la refraction de l'atmoſphère, & venant d'un aſtre S infiniment éloigné, ſoit OD la tangente de cette courbe en O, & l'angle COD, qui ſoit $= \zeta$, marquera la diſtance obſervée de l'Aſtre au zénith Z, ou bien ζ ſera le complément de la hauteur obſervée. Qu'on tire pareillement à un autre point quelconque M du rayon la tangente MT, & poſant $CM = x$, ſoit l'angle $CMT = \omega$, & pour le point infiniment proche m, on aura $Cm = x + dx$, ou $mn = dx$, & l'angle $Cmt = \omega + d\omega$.

VII. La droite CM, ou Cm étant perpendiculaire aux couches refringentes, l'angle Cmt marquera l'angle d'incidence, & l'angle CmT l'angle de réfraction. Donc la denſité de l'air en M étant $= q$ & en $m = q + dq$, nous aurons :

$$\text{ſin } Cmt : \text{ſin } CmT = \alpha^{\frac{q+dq}{c}} : \alpha^{\frac{q}{c}}.$$

Or par la nature des exponentiels on a $\alpha^{\frac{q+dq}{c}} = \alpha^{\frac{q}{c}}\left(1 + \frac{dq}{c}l\alpha\right)$,

& partant nous aurons :

$$\text{ſin } Cmt = \left(1 + \frac{dq}{c}l\alpha\right) \text{ſin } CmT.$$

Or puiſque α ne diffère de l'unité, qu'extrêmement peu, ſon logarithme $l\alpha$ ſera aſſés exactement $= \alpha - 1$; donc, à cauſe de $\alpha < 1$, on aura

$$\text{ſin } Cmt = \left(1 - \frac{(1-\alpha)dq}{c}\right) \text{ſin } CmT.$$

VIII.

VIII. Soit l'angle au centre $OCM = \Phi$, & partant $MCm = d\Phi$; & puisque l'angle $CmT = CMT - MCm$, nous aurons :

$$Cmt = \omega + d\omega \quad \& \quad CmT = \omega - d\Phi ; \quad \text{donc}$$

$$\sin Cmt = \sin\omega + d\omega\cos\omega \quad \& \quad \sin CmT = \sin\omega - d\Phi\cos\omega$$

d'où nous tirons l'équation ſuivante :

$$\sin\omega + d\omega\cos\omega = \sin\omega - d\Phi\cos\omega - \frac{(1-\alpha)\,dq}{c}\sin\omega, \quad \text{ou bien}$$

$$-\frac{(1-\alpha)\,dq}{c} = \frac{(d\Phi + d\omega)}{\text{tang}\,\omega} = \frac{d\omega}{\text{tang}\,\omega} + \frac{d\Phi}{\text{tang}\,\omega} = \frac{dq}{c}\,l\alpha$$

en remettant $l\alpha$ pour $\alpha - 1$; afin que rien ne ſoit négligé.

IX. Or, puisque $mn = dx$ & $Mn = x\,d\Phi$, la fraction $\frac{x\,d\Phi}{dx}$ exprime la tangente de l'angle CmT, ou bien de l'angle ω, de ſorte que $\text{tang}\,\omega = \frac{x\,d\Phi}{dx}$, & partant $\frac{d\Phi}{\text{tang}\,\omega} = \frac{dx}{x}$. D'où l'équation trouvée ſe changera en cette forme :

$$\frac{dq}{c}\,l\alpha = \frac{d\omega}{\text{tang}\,\omega} + \frac{dx}{x}$$

dont l'intégrale eſt : $\frac{q}{c}\,l\alpha = l\sin\omega + lx + \text{Conſt.}$ ou bien $\alpha^{\frac{q}{c}} = C\,x\sin\omega$. Or pour le point O il devient $x = a$; $q = k$ & $\omega = \zeta$; donc $\alpha^{\frac{k}{c}} = C\,a\sin\zeta$, & partant la conſtante $C = \frac{\alpha^{k:c}}{a\sin\zeta}$; d'où nous aurons cette équation determinée :

$$\alpha^{\frac{q}{c}}\,a\sin\zeta = \alpha^{\frac{k}{c}}\,x\sin\omega, \quad \text{ou} \quad a\sin\zeta = \alpha^{\frac{k-q}{c}}\,x\sin\omega.$$

X.

X. Mais puisque rang $\omega = \frac{x\,d\Phi}{dx}$, il s'enſuit :

$$\text{ſin } \omega = \frac{x\,d\Phi}{V(dx^2 + xx\,d\Phi^2)} = \frac{a\,\alpha^{\frac{q-k}{c}}\,\text{ſin } \zeta}{x},$$

d'où nous tirons :

$$d\Phi = \frac{a\,\alpha^{\frac{q-k}{c}}\,dx\,\text{ſin } \zeta}{x\,V(xx - aa\,\alpha^{\frac{2q-2k}{c}}\,\text{ſin } \zeta^2)}$$

ce qui eſt une équation, où les variables x & Φ ſont ſéparées, puiſque la denſité q peut être regardée comme une fonction de x. Cette équation exprime donc la nature de la courbe du rayon O M S, d'où l'on pourroit aiſément tirer une conſtruction par le moyen de la quadrature ou rectification de quelque courbe.

XI. Mais, de quelque maniere qu'on traite cette équation, on ne viendra jamais à bout d'en tirer une expreſſion finie, qui marque la quantité de la réfraction pour toutes les hauteurs, quoiqu'il ſoit fort aiſé d'en aſſigner les réfractions, qui répondent à des hauteurs conſidérables ; or pour les hauteurs fort petites, ces expreſſions, quelques exactes qu'elles ſoient pour de plus grandes, s'écarteront toujours beaucoup de la vérité. Ainſi tout revient ici à la decouverte d'une méthode tout particuliere, qui nous conduiſe à la connoiſſance de la véritable courbure du rayon O M S.

XII. Dans cette vuë il ſera bon de développer quelques propriétés de cette courbe ; or d'abord je remarque, que ſi l'on tire du centre C la perpendiculaire C T ſur la tangente C M, cette perpendiculaire C T ſera $= x\,\text{ſin } \omega = \alpha^{\frac{q-k}{c}}\,a\,\text{ſin } \zeta$. D'où nous voyons, qu'en éloignant le point M à l'infini, où la denſité q deviendra $= 0$,

la

la perpendiculaire à la tangente ſera $= \alpha^{\frac{-k}{c}} a \sin \zeta$: & il eſt évident que cette tangente eſt l'aſymtote de la courbe cherchée O M S : de ſorte que nous connoiſſons déjà la diſtance de cette aſymtote au centre C.

XIII. Poſant pour un point M quelconque la perpendiculaire $CT = p$, de ſorte que $p = \alpha^{\frac{q-k}{c}} a \sin \zeta$, on ſait que le rayon de la dévelopée en M eſt $= \frac{x\,dx}{dp}$. Or, ayant $dp = \alpha^{\frac{q-k}{c}} \frac{a\,dq}{c} l\alpha . \sin \zeta$. ce rayon de la developée en M ſera $= \frac{c\,\alpha^{\frac{k-q}{c}} x\,dx}{a\,dq\,l\alpha . \sin \zeta}$. Donc au point O où $x = a$ & $q = k$, le rayon de courbure, ou de la dévelopée, eſt $= \frac{c\,dx}{dq\,l\alpha . \sin \zeta}$, où il faut ſuppoſer que le rapport entre x & q, & partant entre dx & dq, eſt connu.

XIV. Comme la courbure de la courbe en chaque point eſt déterminée par le rayon de la dévelopée, ainſi la variabilité de la courbure ſe connoitra par la courbure de la dévelopée même, on bien par le rayon de courbure de la dévelopée. Poſons donc le rayon de courbure en M, $\frac{c\,\alpha^{\frac{k-q}{c}} x\,dx}{a\,dq\,l\alpha \sin \zeta} = r$, & l'élément de la courbe $M\,m = \frac{x\,dx}{\sqrt{(xx - aa\alpha^{\frac{2q-2k}{c}} \sin \zeta^2)}} = ds$ le ſecond rayon de courbure, ou celui de la dévelopée, ſera $= \frac{r\,dr}{ds}$.

XV.

XV. Puisque q eſt fonction de x, ſoit $dx = p\,dq$, pour avoir en général $r = \frac{c\alpha^{\frac{k-q}{c}}\,px}{l\alpha\,\sin\zeta^2}$: d'où nous tirons :

$$dr = \frac{c\alpha^{\frac{k-q}{c}}}{l\alpha\,\sin\zeta^2}\left(p\,dx + x\,dp - \frac{px\,dq}{c}\,l\alpha\right) :$$

donc le ſecond rayon de courbure :

$$\frac{r\,dr}{ds} = \frac{c\,c\,\alpha^{\frac{2k-2q}{c}}\,p}{aa(l\alpha.\sin\zeta^2)^2}\left(p+\frac{x\,dp}{dx}-\frac{x}{c}\,l\alpha\right)V(xx-aa\alpha^{\frac{2q-2k}{c}}\sin\zeta^2).$$

Or je ferai bientôt voir, combien la connoiſſance des rayons de courbure, tant du premier que du ſecond ordre, contribuë à la détermination de la courbe OMS, & par conſéquent à la decouverte de la réfraction.

XVI. Mais, avant que de paſſer outre, il faut chercher le rapport entre les deux variables x & q ; ou bien il faut déterminer la denſité de l'atmoſphère à chaque hauteur P. Pour cet effet ſoit la hauteur du barometre en $O = h$, au tems de l'obſervation, & en montant le barometre en P, ſoit ſa hauteur $= u$, & en $p = u + du$. De plus ſoit la denſité du mercure $= nc$, & le poids d'une colonne de mercure de la hauteur $= du$ ſera $= ncdu$.

XVII. Or la denſité de l'air en P étant $= q$, le poids d'une colomne d'air de la hauteur $Pp = dx$ ſera $= qdx$; dont la preſſion de l'atmoſphère en p ſera plus petite qu'en P. Donc, puisque la preſſion de l'atmoſphère balance le mercure dans le barometre, il faut être $qdx = -ncdu$. Or ſi nous ſuppoſons, que la denſité de l'air ſoit proportionelle à la hauteur du barometre, nous aurons $u:q = h:k$, ou bien $u = \frac{hq}{k}$, donc à cauſe de $du = \frac{hdq}{k}$, nous obtiendrons

$qdx = -\frac{nchdq}{k}$, ou $dx = -\frac{nchdq}{kq}$; de ſorte qu'il ſeroit $p = \frac{dx}{dq} = -\frac{nch}{kq}$.

XVIII. Cette ſuppoſition auroit lieu, ſi l'atmoſphère étoit doüée, par toute ſa hauteur, du même degré de chaleur; mais lorsqu'en P régne un autre degré de chaleur qu'en O, il ne ſera plus permis de ſuppoſer $u:q = h:k$; donc, pour rendre cette détermination plus juſte, il faut avoir égard à la chaleur, dont l'effet conſiſte dans l'augmentation du reſſort de l'air, qui ſoutient proprement la colomne du mercure dans le barometre.

XIX. Conſidérons donc une maſſe d'air dont la denſité ſoit $= c$ & qui ſoit doüée d'un certain degré de chaleur $= \gamma$: dans cet état la maſſe d'air aura un certain degré d'élaſticité par laquelle elle ſoutiendra une certaine colomne de mercure dans le barometre, qui ſoit $= b$. Si à la même denſité convenoit un plus grand degré de chaleur, elle ſoutiendroit auſſi une plus grande hauteur du barometre: or, ſi la chaleur γ demeurant la même, la denſité de l'air étoit, ou plus grande, ou plus petite, la hauteur ſoutenuë du barometre ſeroit augmentée ou diminuée dans la même raiſon.

XX. Puisque les degrés des chaleurs ne ſont pas fixés, mais qu'ils s'eſtiment ordinairement des diviſions arbitraires des thermometres; je concevrai ici un thermometre tellement diviſé, que les hauteurs, qu'il marque pour chaque chaleur, ſoient égales aux hauteurs du barometre, qu'un air doüé de cette chaleur, mais dont la denſité ſoit conſtamment $= c$, eſt capable de ſoutenir: ou que les hauteurs marquées par le thermometre ſoient ſeulement proportionnelles aux hauteurs du barometre, tandis que la denſité de l'air demeure la même.

XXI. Cela poſé, ſi la denſité de l'air eſt $= C$, ſa chaleur $= \Gamma$, & que cet air ſoutienne la hauteur du barometre $= B$: il eſt clair qu'on aura: $B : b = C\Gamma : c\gamma$.

D'où

D'où l'on voit, que le thermometre dont je parle, doit être tellement diviſé, que tant que la hauteur du barometre eſt la même, les nombres indiqués par le thermometre Γ & γ ſoient toujours réciproquement proportionnels aux denſités de l'air.

XXII. Soit maintenant la chaleur, ou plutôt le nombre indiqué par le thermometre en $O = g$, & en $P = v$; & puisque la denſité de l'air eſt ſuppoſée en $O = k$ & en $P = q$; or la hauteur du barometre en $O = h$ & en $P = u$; nous aurons $h : b = gk : \gamma c$, & $u : b = vq : \gamma c$; ou bien

$$\frac{b}{\gamma c} = \frac{h}{gk} = \frac{u}{vq}, \quad \text{donc} \quad u = \frac{hqv}{gk} = \frac{bqv}{\gamma c}$$

& partant

$$dx = -\frac{nb}{\gamma}\left(\frac{vdq}{q} + dv\right); \quad \text{donc} \quad p = -\frac{nb}{\gamma}\left(\frac{v}{q} + \frac{dv}{dq}\right).$$

XXIII. Cette formule ſervira donc à trouver la denſité de l'atmoſphère à chaque hauteur: mais pour cela il faut qu'on ſache la chaleur, ou le degré marqué par le thermometre, que je viens d'indiquer, à chaque hauteur: ainſi, ſi la chaleur étoit par tout la même, ou $v = g$, nous aurions $dx = -\frac{nbgdq}{\gamma q}$; ou bien $x - a = \frac{nbg}{\gamma} l \frac{k}{q}$; de ſorte que prenant e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, on auroit $\frac{k}{q} = e^{\frac{\gamma(x-a)}{nbg}}$, ou $q = ke^{\frac{-\gamma(x-a)}{nbg}}$.

XXIII. Mais, puisque la chaleur diminuë plus on s'éloigne en montant, ſi nous ſuppoſons que la chaleur diminuë en montant en même raiſon que la denſité, de ſorte qu'il ſeroit: $v : g = q : k$, nous aurions $v = \frac{gq}{k}$, & partant:

 $dx =$

$$dx = -\frac{nbg}{\gamma k}(dq + dq) = -\frac{2nbg\,dq}{\gamma k}, \quad \text{donc :}$$

$$x - a = \frac{2nbg}{\gamma k}(k - q), \quad \text{ou} \quad q = k - \frac{\gamma k(x-a)}{2nbg}.$$

Donc cette ſuppoſition ne ſauroit avoir lieu, puisque la denſité deviendroit enfin négative, de même que la chaleur.

XXIV. Poſons $OP = x - a = z$; & ſoit $v = \frac{fg}{f+z}$; de ſorte qu'à la hauteur $z = f$, la chaleur ſoit la moitié de celle en O; & puisque $dx = dz$ nous aurons :

$$-\frac{\gamma\,dz}{nb} = \frac{fg\,dq}{(f+z)q} - \frac{fg\,dz}{(f+z)^2},$$

qui étant multipliée par $f + z$, & intégrée donne :

$$\frac{-\gamma}{nb}(fz + \tfrac{1}{2}zz) = -fg\,l\frac{k}{q} - fg\,l\frac{f+z}{f},$$

ou bien $\frac{k(f+z)}{fq} = e^{\frac{\gamma z(2f+z)}{2nbfg}}$, de ſorte que

$$q = \frac{k(f+z)}{f}e^{-\frac{\gamma z(2f+z)}{2nbfg}}.$$

XXV. Cette hypotheſe paroit aſſés conforme à la vérité, puisqu'on peut prendre pour f une telle quantité, qui ſatisfait en toutes occaſions. Car, parce que f marque la hauteur, où la chaleur eſt réduite à la moitié, il paroit très probable, qu'à une hauteur quelconque $z = x - a$, la chaleur ſoit $v = \frac{fg}{f+z}$, de ſorte que poſant $z = mf$ on ait $v = \frac{1}{1+m}g$.

XXVI.

XXVI. J'adopterai donc cette hypotheſe pour en tirer la détermination des refractions: & puisque $z = x - a$, & $dx = dz = p\,dq$, nous aurons $p = \frac{-nbfg(f+z)}{\gamma(f+z)^2 q - nbfgq}$. Donc pour le commencement de la courbe, où $z = 0$; & $q = k$, nous aurons $p = \frac{-nbfg}{\gamma fk - nbgk}$. De plus pour le ſecond rayon de courbure, nous aurons : $dp =$

$$\frac{n\gamma bfg(f+z)^2 qdz + nnbbfffgqdz + n\gamma bfg(f+z)^3 dq - nnbbfffg(f+z)dq}{(\gamma(f+z)^2 - nbfg)^2 qq}$$

ou bien :

$$\frac{dp}{p} = \frac{dz}{f+z} - \frac{dq}{q} - \frac{2\gamma(f+z)dz}{\gamma(f+z)^2 - nbfg} = -\frac{dq}{q} - \frac{\gamma(f+z)^2 pdq - nbfg\,pdq}{(f+z)(\gamma(f+z)^2 - nbfg)}$$

Or à cauſe de $dx = p\,dq$, le ſecond rayon de courbure ſera $\frac{r\,dr}{ds} =$

$$\frac{cc\alpha^{\frac{2k-q}{c}} pp}{aa(l\alpha.\sin\zeta)^2}\left(1 - \frac{xl\alpha}{cp} - \frac{x}{pq} - \frac{\gamma(f+z)^2 x - nbfgx}{(f+z)(\gamma(f+z)^2 - nbfg)}\right) V(xx - aa\alpha^{\frac{2q-2k}{c}}\sin\zeta^2)$$

XXVII. De là nous tirerons pour le commencement de la courbe en O, premièrement le premier rayon de courbure

$$r = \frac{cp}{l\alpha.\sin\zeta} = -\frac{nbcfg}{(\gamma fk - nbgk)\,l\alpha.\sin\zeta}$$

& à cauſe de $q = k$; $x = a$; $z = 0$; & $p = -\frac{nbfg}{(\gamma f - nbg)k}$

le ſecond rayon de courbure : $\frac{r\,dr}{ds} =$

$$\frac{nnbbccffgg}{akk(\gamma f - nbg)^2 (l\alpha.\sin\zeta)^2}\left(1 + \frac{ak(\gamma f - nbg)l\alpha}{nbcfg} + \frac{ak(\gamma f - nbg)}{nbfgk} - \frac{a\gamma f - nabg}{\gamma ff - nbfg}\right) cf\zeta$$

De plus cette courbe ayant une aſymtote, la perpendiculaire, qui y eſt tirée du centre C, ſera $= \alpha^{\frac{-k}{\zeta}} a \sin \zeta$: & ζ marque l'angle que fait la tangente de la courbe en O avec la verticale OZ.

XXVIII. Ce ſont les élémens, qui ſeront ſuffiſans, comme je ferai voir, pour connoitre la courbe entiere OMS, que le rayon forme en ſon paſſage par l'atmoſphère. Car, puiſqu'on ſçait, que la courbure eſt partout extrêmement petite, on la pourra regarder comme une partie d'une courbe aſymtotique, qui eſt déjà très éloignée du commencement, de ſorte que l'équation pour cette courbe doit devenir très
Fig. 2. ſimple. Car ſoit ADS l'aſymtote de cette courbe, & A le commencement, qu'on nomme l'abſciſſe $AV = t$ & l'appliquée $VO = y$; & lorsque t eſt déjà extrêmement grande, de quelque nature que ſoit la courbe, il eſt certain que la nature de la portion OS, ſera toujours compriſe dans cette formule, $t = \frac{C}{y^m}$.

XXIX. Il eſt d'abord clair, que les conditions expoſées à l'égard de la perpendiculaire CD tirée du centre C à l'aſymtote, & des deux rayons de courbure au point O avec l'angle ZOT que la tangente OT fait avec la verticale OZ; que ces conditions, dis-je, ſont ſuffiſantes pour déterminer tant l'eſpece que la poſition de la courbe OS. Il ne s'agit donc que de déterminer la poſition de l'aſymtote ADS, l'abſciſſe $AV = t$, la conſtante C avec l'expoſant m, pour avoir la vraye courbe OS du rayon.

XXX. Puiſque $t = \frac{C}{y^m}$, nous aurons $dt = -\frac{mC\,dy}{y^{m+1}}$; ou bien poſons $dt = -\frac{E\,dy}{y^{\mu}}$; de ſorte que $m = \mu - 1$, & $C = \frac{E}{\mu}$, ou plutôt ſoit $dt = -\frac{E\,dy}{y^{\mu}}$ l'équation différentielle de la courbe cher-

cherchée, & la ſoutangente ſera $VT = -\frac{y\,dt}{dy} = \frac{E}{y^{\mu-1}}$. Soit l'angle $OTV = \theta$, & il eſt clair que cet angle exprime la réfraction même, lorsque la diſtance de l'Aſtre S eſt regardée comme infinie ; de là nous aurons $\text{tang}\,\theta = \frac{OV}{VT} = \frac{y^{\mu}}{E}$.

XXXI. Enſuite, puisque l'angle $TOZ = \zeta$, nous aurons l'angle $ORV = \zeta + \theta$, donc $ROV = OCD = 90° - \zeta - \theta$. Et partant nous en tirerons la valeur de la perpendiculaire $CD = y + a\,\text{ſin}\,(\zeta + \theta)$: laquelle devant être $= \alpha^{\frac{-k}{c}}\, a\,\text{ſin}\,\zeta$, nous aurons cette équation $y + a\,\text{ſin}\,(\zeta+\theta) = \alpha^{\frac{-k}{c}}\, a\,\text{ſin}\,\zeta$: qui eſt la ſeconde, la premiere étant $\text{tang}\,\theta = \frac{y^{\mu}}{E}$ pour déterminer les quatre inconnues, θ, E, y & μ ; de ſorte que nous avons beſoin encore de deux équations.

XXXII. L'élément de la courbe Oo ſera $ds = -\frac{dy}{y^{\mu}}\sqrt{(EE+y^{2\mu})}$ à cauſe de dy négatif en avançant de O vers S: donc prenant le différentiel dy conſtant, à cauſe de $ddt = \frac{\mu E\,dy^2}{y^{\mu+1}}$, le premier rayon de courbure ſera $r = -\frac{ds^3}{dy\,ddt} = \frac{(EE+y^{2\mu})^{\frac{3}{2}}}{\mu\,E\,y^{2\mu-1}}$; qui nous fournit cette troiſième équation : $\frac{(EE+y^{2\mu})^{\frac{3}{2}}}{\mu\,E\,y^{2\mu-1}} = -\frac{n\,b\,c\,f\,g}{(\gamma f - nbg)k/a\,\text{ſin}\,\zeta^2}$.

XXXIII.

XXXIII. Pour trouver le ſecond rayon de courbure, prenons les differentiels :

$$dr = -\frac{dy\,((2\mu-1)EE-(\mu+1)y^{2\mu})\,V(EE+y^{2\mu})}{\mu\,E\,y^{2\mu}}$$

pour avoir

$$\frac{dr}{ds} = \frac{(2\mu-1)EE-(\mu+1)\,y^{2\mu}}{\mu\,E\,y^{\mu}}$$

laquelle valeur doit être égale au ſecond rayon de courbure diviſé par le premier ; ce qui donne la quatrième équation

$$\frac{(2\mu-1)EE-(\mu+1)y^{2\mu}}{\mu\,E\,y^{\mu}} = -\frac{nbcfg}{ak(\gamma f-nbg)l\alpha.\mathrm{tg}\zeta^2}\left(1+\frac{ak(\gamma f-nbg)l\alpha}{nbcfg}+\frac{ak(\gamma f-nbg)}{nbcfg}\,\frac{a(\gamma f+nbg}{f(\gamma f-nbg.}\right.$$

ou bien

$$\frac{(2\mu-1)EE-(\mu+1)y^{2\mu}}{\mu\,E\,y^{\mu}} = -\frac{cf}{akl\alpha.\mathrm{tg}\zeta^2}\left(\frac{nbg}{\gamma f-nbg}+\frac{akl\alpha}{cf}+\frac{a\gamma(\gamma f-3nbg)}{(\gamma f-nbg)^2}\right)$$

XXXIV. Or il faut ſe ſouvenir que $bgk = \gamma ch$ par le §. XXII. & poſant pour abréger :

$$-\frac{nbcfg}{(\gamma f-nbg)\,kl\alpha} = A$$

$$-\frac{nbcfg}{a(\gamma f-nbg)\,kl\alpha} - 1 - \frac{\gamma cf(\gamma f-3nbg)}{(\gamma f-nbg)^2}\,\frac{}{kl\alpha} = B$$

nos quatre équations ſeront :

I. $y^{\mu} = E\,\mathrm{tang}\,\theta$;

II. $y + a\,\mathrm{ſin}\,(\zeta+\theta) = \alpha^{\frac{-k}{c}}\,a\,\mathrm{ſin}\,\zeta$

III.

III. $\dfrac{(EE+y^{2\mu})^{\frac{3}{2}}}{\mu E y^{2\mu-1}} = \dfrac{A}{\sin\zeta}$ &

IV. $\dfrac{(2\mu-1)EE-(\mu+1)y^{2\mu}}{\mu E y^{\mu}} = \dfrac{B}{\operatorname{tang}\zeta}$.

XXXV. Puisque $y^{\mu} = E\operatorname{tang}\theta$, il ſera $\sqrt{(EE+y^{2\mu})} = E\operatorname{ſec}.\theta$, d'où la III. & IV. prendront les formes ſuivantes :

III. $\dfrac{y\operatorname{ſec}.\theta^3}{\mu\operatorname{tang}\theta^2} = \dfrac{A}{\sin\zeta}$, ou $y = \dfrac{\mu A \sin\theta^2 \cos\theta}{\sin\zeta}$.

IV. $\dfrac{2\mu-1-(\mu+1)\operatorname{tang}\theta^2}{\mu\operatorname{tang}\theta} = \dfrac{B}{\operatorname{tang}\zeta}$; d'où nous tirons :

$$\mu = \frac{\operatorname{tang}\zeta.\operatorname{ſec}.\theta^2}{\operatorname{tang}\zeta(2-\operatorname{tg}\theta^2)-\operatorname{tang}\theta} = \frac{\operatorname{tang}\zeta}{\operatorname{tg}\zeta(2\cos\theta^2-\sin\theta^2)-B\sin\theta\cos\theta}$$

& partant $y = \dfrac{A\sin\theta^2\cos\theta}{\sin\zeta(2\cos\theta^2-\sin\theta^2)-B\cos\zeta\sin\theta\cos\theta}$.

XXXVI. Cette valeur étant ſubſtituée dans la ſeconde équation donnera :

$$\frac{A\sin\theta^2\cos\theta}{\sin\zeta(2\cos\theta^2-\sin\theta^2)-B\cos\zeta\sin\theta\cos\theta} + a\sin(\zeta+\theta) = \alpha^{\frac{-k}{c}}a\sin\zeta,$$

laquelle ne contenant que la ſeule inconnuë θ, qui marque la réfraction qui convient à la hauteur obſervée $= 90^\circ-\zeta$, ou à la diſtance au zenith $= \zeta$; elle nous découvrira cette réfraction.

XXXVII. Puisque nous ſavons que la réfraction θ eſt toujours aſſés petite, pour emploier les approximations, poſons

$$\sin\theta = \theta - \tfrac{1}{6}\theta^3, \quad \& \quad \cos\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\theta\theta,$$

& à cauſe de $\sin(\zeta+\theta) = \sin\zeta\cos\theta + \cos\zeta\sin\theta$, nous aurons :

$$\sin(\zeta+\theta) = \sin\zeta + \theta\cos\zeta - \tfrac{1}{2}\theta\theta\sin\zeta - \tfrac{1}{6}\theta^3\cos\zeta.$$

Donc poſant $\frac{A}{a} = \frac{-nbcfg}{a(\gamma f - nbg)k/\alpha} = D$ nous aurons :

$$\frac{D\theta\theta(1-\frac{5}{6}\theta\theta)}{\sin\zeta(2-3\theta\theta)-B\theta\cos\zeta} + \sin\zeta + \theta\cos\zeta - \tfrac{1}{2}\theta\theta\sin\zeta = \alpha^{\frac{-k}{c}}\sin\zeta.$$

XXXVIII. Mais, puisque aſſés exactement $\alpha^{\frac{-k}{c}} = 1 - \frac{k}{c}l\alpha$,

& $l\alpha = -(1-\alpha)$, nous aurons $\alpha^{\frac{-k}{c}} = 1 + \frac{(1-\alpha)k}{c}$, &

partant en négligeant les termes, où θ a plus de deux dimenſions :

$$D\theta\theta + 2\theta\sin\zeta\cos\zeta - \theta\theta\sin\zeta^2 - \frac{2(1-\alpha)k}{c}\sin\zeta^2$$

$$- B\theta\theta\cos\zeta^2 + \frac{B(1-\alpha)k}{c}\theta\sin\zeta\cos\zeta + \frac{3(1-\alpha)k}{c}\theta\theta\sin\zeta^2 = 0.$$

Or parce que $1-\alpha$ eſt ſi extrêmement petit, cette équation ſe réduit à celle-cy :

$$\theta\theta = \frac{-2\theta\sin\zeta\cos\zeta - \frac{B(1-\alpha)k}{c}\theta\sin\zeta\cos\zeta + \frac{2(1-\alpha)k}{c}\sin\zeta^2}{D - \sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2},$$

qui donne

$$\theta = \frac{-\left(1+\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right)\sin\zeta\cos\zeta + \sin\zeta\sqrt{\left(\left[1+\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right]^2\cos\zeta^2 + \frac{2(1-\alpha)k}{c}D - \frac{2(1-\alpha)k}{c}\sin\zeta^2 - \frac{2(1-\alpha)k}{c}B\cos\zeta^2\right)}}{D - \sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2}$$

ou

$$\theta = \frac{-\left(1+\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right)\sin\zeta\cos\zeta + \sin\zeta\sqrt{\left(\left[1-\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right]^2\cos\zeta^2 + \frac{2(1-\alpha)k}{c}\left[D-\sin\zeta^2\right]\right)}}{D - \sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2}$$

XXXIX.

XXXIX. On pourroit encore plus exactement aſſigner la valeur de la réfraction θ, en ne point négligeant les plus hautes puiſſances de θ; ou bien on n'auroit qu'à reſoudre cette équation :

$$D\sin\theta^2\cos\theta = [\sin\zeta(2\cos\theta^2-\sin\theta^2)-B\cos\zeta\sin\theta\cos\theta]\,[\sin\zeta(1-\cos\theta)-\cos\zeta\sin\theta+\frac{(1-\alpha)k}{c}\sin\zeta]$$

qui ſe reduit à une équation du ſixième degrè ; mais on verra bientôt, que les termes que j'ai négligés, ſont ſi petits, que la valeur trouvée pour θ ne ſauroit différer ſenſiblement de la vérité: du moins la différence ne ſauroit jamais à beaucoup prés monter à une ſeconde.

XL. En poſant pour $l\alpha$ ſa valeur $-(1-\alpha)$ nous aurons

$$D = \frac{nbcfg}{(1-\alpha)ak(\gamma f-nbg)}, \quad \&$$

$$B = \frac{nbcfg}{(1-\alpha)ak(\gamma f-nbg)} - 1 + \frac{\gamma cf(\gamma f-3nbg)}{(1-\alpha)k(\gamma f-nbg)^2}.$$

Or, puiſque la denſité de l'air k doit être concluë de la hauteur du barometre h, & du nombre g indiqué par le thermometre, nous aurons $\frac{k}{c} = \frac{\gamma h}{bg}$ ou $\frac{c}{k} = \frac{bg}{\gamma h}$, & partant

$$D = \frac{nbbfgg}{(1-\alpha)a\gamma h(\gamma f-nbg)}, \quad \&$$

$$B = D - 1 + \frac{bfg(\gamma f-3nbg)}{(1-\alpha)h(\gamma f-nbg)^2}.$$

XLI. La valeur trouvée pour θ fait dabord voir qu'au zenith, lorsque $\zeta = 0$, la réfraction evanouït auſſi : mais pour les Aſtres vus dans l'Horizon, lorsque $\zeta = 90°$, la réfraction ſe trouve

$$\theta = \sqrt{\frac{2(1-\alpha)k}{c(D-1)}} = \sqrt{\frac{2(1-\alpha)\gamma h}{bg(D-1)}}$$

ou en remettant pour D ſa valeur, la réfraction horizontale ſera

$$\frac{(1-\alpha)\gamma h}{bg} \sqrt{\frac{2abg(\gamma f-nbg)}{nbbfgg-(1-\alpha)a\gamma h(\gamma f-nbg)}},$$

qui eſt exprimée en parties du ſinus total $=1$; donc, pour avoir ſa valeur en ſecondes, on n'a qu'à multiplier cette formule par le nombre 206265.

XLII. De là on voit, que ſi la valeur de D étoit infinie, ce qui arriveroit lorsque $f=\frac{nbg}{\gamma}$, la réfraction horizontale évanouïroit; & qu'elle augmente, plus la valeur de D ſera petite, ou plus la valeur de f ſera grande. Mais par rapport à la hauteur f, où la chaleur eſt réduite à la moitié de celle qui régne en bas, je remarque qu'elle eſt toujours très grande; car puisque la chaleur ſe réduit à la moitié, lorsque la denſité de l'air devient double, la hauteur du barometre demeurant la même; il eſt clair que ce ſeroit l'effet d'un très horrible froid, qu'on ne ſauroit ſuppoſer dans l'atmoſphère, qu'à une diſtance très éloignée. Donc la quantité f ſurpaſſera toujours de beaucoup la valeur de $\frac{nbg}{\gamma}$, puisque nb eſt environ une mile d'Allemagne, & la fraction $\frac{g}{\gamma}$ ne ſauroit jamais s'éloigner conſidérablement de l'unité.

XLIII. Si nous ſuppoſons que le plus grand froid, qui régne dans les régions polaires, augmente la denſité de l'air d'un tiers, le reſſort demeurant le même, il ſemble très probable que dans les pays chauds un tel degré de froid ne ſauroit être admis dans l'atmoſphère qu'à une hauteur très grande, & qui ſurpaſſe de beaucoup une mile d'Allemagne. Suppoſons donc qu'à une hauteur $z=a$ Miles d'Allegne, le degré de chaleur v ſoit deux tiers du degré g qui régne en bas,

bas, de ſorte que $v = \frac{2}{3}g$; & puisque j'ai ſuppoſé $v = \frac{fg}{f+z}$, nous aurons $\frac{2}{3} = \frac{f}{f+z}$, d'où nous tirons la hauteur f, où la chaleur ne ſera que la moitié de g, = 4 miles d'Allemagne, & partant à peu près $f = \frac{4nbg}{\gamma}$.

XLIV. Poſons donc $f = \lambda nb$, où λ marque un nombre probablement plus grand que 4, & il ſemble même que ce nombre ſera d'autant plus grand, plus la chaleur en bas g ſera petite: car s'il fait déjà aſſés froid en bas, la chaleur ne ſauroit diminuer ſi vite en montant, que s'il y faiſoit plus chaud. D'où il s'enſuit, que le nombre λ ſera plus grand, lorsque g eſt plus petit: ou bien en Eté le nombre λ ſera plus petit qu'en Hyver. Cela remarqué, nous aurons:

$$D = \frac{\lambda nbbggg}{(1-\alpha)a\gamma h(\lambda\gamma-g)} \qquad \alpha$$

$$B = D - 1 + \frac{\lambda bg(\lambda\gamma-3g)}{(1-\alpha)h(\lambda\gamma-g)^2}.$$

XLV. De là, puisque $\frac{k}{c} = \frac{\gamma h}{bg}$, nous aurons pour les quantités, qui entrent dans l'expreſſion trouvée pour la réfraction θ :

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}B = \frac{\lambda nbg}{2a(\lambda\gamma-g)} - \frac{(1-\alpha)\gamma h}{2bg} + \frac{\lambda\gamma(\lambda\gamma-3g)}{2(\lambda\gamma-g)^2}$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}(D-\sin\zeta^2) = \frac{2\lambda nbg}{a(\lambda\gamma-g)} - \frac{2(1-\alpha)\gamma h}{bg}\sin\zeta^2$$

$$D-\sin\zeta^2-Bc\zeta^2 = \frac{\lambda nbbggg\sin\zeta^2}{(1-\alpha)a\gamma h(\lambda\gamma-g)} - \sin\zeta^2 + c\zeta^2 - \frac{\lambda bg(\lambda\gamma-3g)c\zeta^2}{(1-\alpha)h(\lambda\gamma-g)^2}$$

Donc, s'il étoit $\lambda\gamma = 3g$, nous aurions :

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}B = \frac{3nbg}{4a\gamma} - \frac{(1-\alpha)\gamma h}{2bg}.$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}(D-\sin\zeta^2) = \frac{3nbg}{a\gamma} - \frac{2(1-\alpha)\gamma h}{bg}\sin\zeta^2$$

$$D-\sin\zeta^2-B\cos\zeta^2 = \frac{3nbbggg\sin\zeta^2}{2(1-\alpha)aggh} - \sin\zeta^2+\cos\zeta^2.$$

XLVI. Or, si nous posons $\lambda = \infty$, ce qui est le cas où l'atmosphère auroit par toute sa hauteur le même degré de chaleur, ces quantités deviendroient :

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}B = \frac{nbg}{2a\gamma} - \frac{(1-\alpha)\gamma h}{2bg} + \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}(D-\sin\zeta^2) = \frac{2nbg}{a\gamma} - \frac{2(1-\alpha)\gamma h}{bg}\sin\zeta^2$$

$$D-\sin\zeta^2-B\cos\zeta^2 = \frac{nbbggg\sin\zeta^2}{(1-\alpha)a\gamma\gamma h} - \sin\zeta^2+\cos\zeta^2 - \frac{bg\cos\zeta^2}{(1-\alpha)\gamma h},$$

Or, quelque hypothese qui puisse avoir lieu, la réfraction sera :

$$\theta = \frac{-\left(1+\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right)\sin\zeta\cos\zeta+\sin\zeta\sqrt{\left(\left[1-\frac{(1-\alpha)k}{2c}B\right]^2\cos\zeta^2+\frac{2(1-\alpha)k}{c}\left[D-\sin\zeta^2\right]\right)}}{D-\sin\zeta^2-B\cos\zeta^2}$$

XLVII. S'il arrivoit que le dénominateur $D-\sin\zeta^2-B\cos\zeta^2$ devint quelque part $= 0$, alors nous aurions :

$$\theta = \frac{\frac{(1-\alpha)k}{c}\cdot\operatorname{tang}\zeta}{1+\frac{(1-\alpha)k}{2c}\cdot B}.$$

Pour

Pour ce cas l'hypotheſe $\lambda\gamma = 3g$ donneroit, à cauſe de l'extrême petiteſſe des termes $\frac{nbg}{a\gamma}$, & $\frac{(1-\alpha)\gamma h}{bg}$, la réfraction $\theta = \frac{(1-\alpha)\gamma h}{bg}$ tgζ; mais l'autre hypotheſe $\lambda = \infty$ donneroit $\theta = \frac{2(1-\alpha)\gamma h}{3bg}$ tang ζ.

XLVIII. Dévelopons ces deux hypotheſes, entre leſquelles la Nature ſemble conſiſter, plus en détail: & puiſque nb eſt environ une Mile d'Allemagne, & le rayon de la terre en contient environ 858, la valeur de $\frac{nb}{a}$ ſera $= \frac{1}{858}$. Enſuite, puiſqu'il eſt à peu près $1-\alpha = \frac{1}{3432}$, il ſera $\frac{nb}{(1-\alpha)a} = 4$, & les raiſons $g:\gamma$ & $h:b$ ne différeront pas beaucoup de celle d'égalité. Cela remarqué, il ſera aiſé de voir, quels termes ſont ſi petits par rapport aux autres, qu'on les puiſſe négliger.

XLIX. Soit donc pour la premiere hypotheſe $\lambda\gamma = 3g$, & nous aurons:

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}\,B = \frac{1}{1144}\cdot\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{6864}\cdot\frac{\gamma h}{bg}$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}\,(D-\sin\zeta^2) = \frac{1}{286}\cdot\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{1716}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\sin\zeta^2$$

$$D-\sin\zeta^2-B\cos\zeta^2 = 6\cdot\frac{bgg}{\gamma\gamma h}\sin\zeta^2-\sin\zeta^2+\cos\zeta^2$$

Or

Or, pour l'autre hypotheſe $\lambda = s$ nous aurons :

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}\,B = \frac{1}{1716}\cdot\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{6864}\cdot\frac{\gamma h}{bg} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}\,(D-\sin\zeta^2) = \frac{1}{429}\cdot\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{1716}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\sin\zeta^2$$

$$D-\sin\zeta^2-B\cos\zeta^2 = 4\cdot\frac{bgg}{\gamma\gamma h}\sin\zeta^2-\sin\zeta^2+\cos\zeta^2--3432\,\frac{bg}{\gamma h}\cos\zeta^2.$$

L. Soit la diſtance de l'aſtre au zenith, ou l'angle ζ, extrêmement petit, & ayant pour ce cas :

$$\theta = -\frac{(1-\alpha)k}{c}\,B\sin\zeta\cos\zeta + \frac{\frac{(1-\alpha)k}{c}\,(D-\sin\zeta^2)\sin\zeta}{\left(1-\frac{(1-\alpha)k}{2c}\,B\right)\cos\zeta}$$

$$D - \sin\zeta^2 - B\cos\zeta^2$$

Donc, en négligeant les plus petits termes, nous aurons pour la premiere hypotheſe $\lambda\gamma = 3g$: $\theta =$

$$\frac{-\left(\frac{1}{572}\cdot\frac{g}{\gamma}-\frac{1}{3432}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\right)\sin\zeta\cos\zeta+\left(\frac{1}{572}\cdot\frac{g}{\gamma}-\frac{1}{3432}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\cdot\sin\zeta^2\right)\mathrm{tg}\,\zeta}{\cos\zeta^2}$$

ou bien $\theta = \frac{1}{572}\cdot\frac{g}{\gamma}\,\mathrm{tang}\,\zeta^3 + \frac{1}{3432}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\cdot\frac{\mathrm{tang}\,\zeta\cdot\cos 2\zeta}{\cos\zeta^2}$.

Et pour l'autre hypotheſe $\lambda = s$ nous aurons : $\theta =$

$$\frac{-\left(1+\frac{1}{858}\cdot\frac{g}{\gamma}-\frac{1}{3432}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\right)\sin\zeta\cos\zeta+2\left(\frac{1}{858}\cdot\frac{g}{\gamma}-\frac{1}{3432}\cdot\frac{\gamma h}{bg}\sin\zeta^2\right)\mathrm{tg}\,\zeta}{-3432\cdot\frac{bg}{\gamma h}\cos\zeta^2}$$

ou

ou $\theta = \frac{1}{3432} \cdot \frac{\gamma h}{bg}$ tang ζ ; donc dans l'un & l'autre cas la réfraction eſt à peu près la même.

LI. Pour la réfraction horizontale ou $\zeta = 90$ ayant $\theta = \frac{V \frac{2(1-\alpha)k}{c}(D-1)}{D-1}$, nous aurons pour la premiere hypotheſe

$$\lambda\gamma = 3g :$$

$$\theta = \frac{V\left(\frac{1}{286} \cdot \frac{g}{\gamma} - \frac{1}{1716} \cdot \frac{\gamma h}{bg}\right)}{6 \cdot \frac{bgg}{\gamma\gamma h} - 1} = \frac{\frac{\gamma h}{bg}}{V 10296\left(\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\gamma h}{bg}\right)}$$

& pour l'autre hypotheſe $\lambda = s$:

$$\theta = \frac{V\left(\frac{1}{429} \cdot \frac{g}{\gamma} - \frac{1}{1716} \cdot \frac{\gamma h}{bg}\right)}{4 \cdot \frac{bgg}{\gamma\gamma h} - 1} = \frac{\frac{\gamma h}{bg}}{V 6864\left(\frac{g}{\gamma} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\gamma h}{bg}\right)}$$

LII. Ces formules ſont fondées ſur un certain état fixe de l'air, qu'il faut expliquer plus diſtinctement : dans cet état de l'air je ſuppoſe, que la hauteur du mercure dans le barometre étant $= b$, il ſoit exactement $\frac{nb}{a} = \frac{1}{858}$: de plus je ſuppoſe que le degré de chaleur γ de cet air ſoit tel, qu'il en réſulte une telle denſité de l'air, que la raiſon de réfraction des rayons, qui entrent du vuide dans cet air, ſoit exactement comme 1 à $1 - \frac{1}{4 \cdot 858}$, ou comme 3432 à 3431 ; de ſorte que $1 - \alpha = \frac{1}{3432}$; & $\frac{nb}{(1-\alpha)a} = 4 \cdot$

Et il n'y a aucun doute, qu'un tel état de l'air tant par rapport à ſon élaſticité qu'à ſa chaleur ne ſoit poſſible ; & qu'il ne puiſſe même exiſter quelquefois.

LIII. Car poſant la hauteur du barometre $b = 2\frac{1}{3}$ pieds ; & la denſité du mercure à celle de cet air, comme 10000 à 1, on aura $nb = 23333$ pieds, ou bien à une mile d'Allemagne ; donc $\frac{nb}{a} = \frac{1}{858}$. Cette même valeur proviendroit, ſi la hauteur du barometre b étoit ou plus grande ou plus petite, & que la denſité de l'air fut augmentée ou diminuée en même raiſon. Or parmi cette infinité de cas, qui produiſent tous $\frac{nb}{a} = \frac{1}{858}$, il s'en trouvera un certainement, où $1 - \alpha$ devient $= \frac{1}{3432}$, laquelle fraction eſt aſſés d'accord avec ce qu'on a trouvé par les expériences : & alors γ marque le degré de chaleur de cet air.

LIV. Ayant donc une fois établi ces deux quantités b & γ, il faut chercher pour chaque autre état de l'air les quantités h & g : dont la quantité h marque la hauteur du barometre, & ſe trouve par conſéquent ſans aucune difficulté. L'autre quantité g, ſe conclura du thermometre, dont les diviſions montrent le volume, qu'une certaine maſſe d'air occupe à chaque degré de chaleur, le reſſort étant le même. De là on aura pour chaque état de l'air, tant le rapport de h à b que de g à γ, exprimé en nombres.

LV. Or nous voyons que ces deux rapports $\frac{g}{\gamma}$ & $\frac{\gamma h}{bg}$, entrent dans nos formules : ſoit donc

$$\frac{g}{\gamma} = M, \quad \& \quad \frac{\gamma h}{bg} = N.$$

Poſons

Poſons de plus pour voir mieux le rapport des nombres $\frac{1}{3432} = \mu$, & nous aurons pour l'hypotheſe $\lambda\gamma = 3g$:

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}\,B = 3\,\mu\,M - \tfrac{1}{2}\,\mu\,N$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}\,(D-\sin\zeta^2) = 12\,\mu\,M - 2\,\mu\,N\sin\zeta^2$$

$$D-\sin\zeta^2-B\cos\zeta^2 = \frac{6\,M}{N}\sin\zeta^2 - \sin\zeta^2 + \cos\zeta^2$$

& pour l'hypotheſe $\lambda = \infty$:

$$\frac{(1-\alpha)k}{2c}\,B = 2\,\mu\,M - \tfrac{1}{2}\,\mu\,N + \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{2(1-\alpha)k}{c}\,(D-\sin\zeta^2) = 8\,\mu\,M - 2\,\mu\,N\sin\zeta^2$$

$$D-\sin\zeta^2-B\cos\zeta^2 = \frac{4\,M}{N}\sin\zeta^2-\sin\zeta^2+\cos\zeta^2-\frac{1}{\mu N}\cos\zeta^2.$$

LVI. En ſubſtituant ces valeurs, nous trouverons la réfraction θ qui répond à la diſtance obſervée au zenith $= \zeta$.

Pour la premiere hypotheſe $\lambda = \frac{3g}{\gamma} = 3\,M$:

$$\theta = \frac{-\left[1+3\mu M-\frac{1}{2}\mu N\right]\sin\zeta\cos\zeta+\sin\zeta\sqrt{\left[(1-3\mu M+\frac{1}{2}\mu N)^2\cos\zeta^2+12\mu M-2\mu N\sin\zeta^2\right]}}{\frac{6\,M}{N}\sin\zeta^2 - \sin\zeta^2+\cos\zeta^2}$$

ou bien en négligeant les termes qui renferment μ^2 :

$$\theta = \frac{-N\left[1+3\mu M-\frac{1}{2}\mu N\right]\sin\zeta\cos\zeta+N\sin\zeta\sqrt{\left[\cos\zeta^2+6\mu M(2-\cos\zeta^2)+\mu N(\cos\zeta^2-2\sin\zeta^2)\right]}}{6\,M\sin\zeta^2+N(\cos\zeta^2-\sin\zeta^2)}$$

& pour la ſeconde hypotheſe $\lambda = s$:

$$\theta = \frac{+\mu N\left[\frac{3}{2}+2\mu M-\frac{1}{2}\mu N\right]\sin\zeta\cos\zeta-\mu N\sin\zeta\sqrt{\left[\frac{1}{4}\cos\zeta^2+2\mu M(4-\cos\zeta^2)+\frac{1}{2}\mu N(\cos\zeta^2-4\sin\zeta^2)\right]}}{\cos\zeta^2-\mu N(\cos\zeta^2-\sin\zeta^2)-4\mu M\sin\zeta^2}$$

ou en négligeant les termes, que ſont extrèmement petits à l'égard des autres

$$\theta = \frac{+\frac{3}{2}\mu N\sin\zeta\cos\zeta-\frac{1}{2}\mu N\sin\zeta\sqrt{\left[\cos\zeta^2+8\mu M-2\mu N\sin\zeta^2\right]}}{\cos\zeta^2+\mu N\sin\zeta^2-4\mu M\sin\zeta^2}.$$

LVII. Dans cette derniere formule il faut diſtinguer deux cas, l'un où $\cos\zeta^2+\mu N\sin\zeta^2$ eſt plus grand que $4\mu M\sin\zeta^2$; & l'autre où il eſt plus petit : cependant dans l'un & l'autre cas la valeur de θ provient affirmative. Mais, lorsque le dénominateur devient extrèmement petit, alors on ne doit plus négliger aucun terme, quelque petit qu'il paroiſſe : on aura donc pour ce cas :

$$\theta = \frac{\mu N\left[\frac{3}{2}+2\mu M-\frac{1}{2}\mu N\right]\sin\zeta\cos\zeta-\mu N\sin\zeta\sqrt{\left[(\frac{1}{2}-2\mu M+\frac{1}{2}\mu N)^2\cos\zeta^2+8\mu M-2\mu N\sin\zeta^2\right]}}{\cos\zeta^2-4\mu M\sin\zeta^2-\mu N(\cos\zeta^2-\sin\zeta^2)}$$

ou bien

$$\theta = \frac{\mu N\left[\frac{3}{2}+2\mu M-\frac{1}{2}\mu N\right]\sin\zeta\cos\zeta-\mu N\sin\zeta\sqrt{\left[\frac{3}{2}+2\mu M-\frac{1}{2}\mu N\right)^2\cos\zeta^2-2\cos\zeta^2+8\mu M\sin\zeta^2+2\mu N(\cos\zeta^2-\sin\zeta^2)\right]}}{\cos\zeta^2-4\mu M\sin\zeta^2-\mu N(\cos\zeta^2-\sin\zeta^2)}$$

LVIII. Poſons maintenant pour abréger

$$\frac{3}{2}+2\mu M-\frac{1}{2}\mu N = L$$

$$\cos\zeta^2-4\mu M\sin\zeta^2-\mu N(\cos\zeta^2-\sin\zeta^2) = Q$$

& nous aurons :

$$\theta = \frac{\mu N L\sin\zeta\cos\zeta-\mu N\sin\zeta\sqrt{(LL\cos\zeta^2-2Q)}}{Q}.$$

Cette

Cette formule dont on peut ſe ſervir en général trés commodément, nous fait d'abord voir, que lorsque le dénominateur Q eſt très petit, on aura :

$$\theta = \frac{\mu N}{L} \text{tang}\, \zeta + \frac{\mu N Q \,\text{tang}\, \zeta}{2 L^3 \cos \zeta^2} + \frac{\mu N Q Q \,\text{tang}\, \zeta}{2 L^5 \cos \zeta^4}.$$

Donc ſi $Q = o$, il deviendra $\theta = \frac{\mu N}{L} \text{tang}\, \zeta$.

LIX. Voyons maintenant plus en détail, quelles Tables de réfractions réſultent de l'une & de l'autre de ces deux hypotheſes, pour chaque degré de chaleur & d'élaſticité de l'air. La baſe de ces tables ſera tirée de l'état de l'air fixe, pour lequel je ſuppoſe que le barometre montre la hauteur b, & le thermometre le degré γ. Ou bien je ſuppoſe que la denſité de l'air eſt telle, que pour le paſſage des rayons du vuide dans cet air, le ſinus d'incidence ſoit au ſinus de réfraction comme 3432 à 3431, ou comme 1 à $1 - \mu$: enſuite je ſuppoſe que la denſité de cet air eſt à celle du mercure exactement comme la hauteur du barometre b au rayon de la terre.

PREMIERE HYPOTHESE
où la chaleur de l'air à une hauteur de 3 miles eſt ſuppoſée reduite à la moitié.

LX. Pour cette hypotheſe nous avons trouvé, que poſant

$$M = \frac{g}{\gamma} \; ; \; N = \frac{\gamma h}{b g}, \text{ \& de plus}$$

$$L = 1 + 2\mu M - \tfrac{1}{2}\mu N$$

$$Q = 6 M \sin \zeta^2 + N(\cos \zeta^2 - \sin \zeta^2),$$

la réfraction qui répond à la diſtance obſervée au zenith $= \zeta$ ſera

$$\theta = \frac{-LN \sin \zeta \cos \zeta + N \sin \zeta \sqrt{(LL \cos \zeta^2 + 2\mu Q)}}{Q}.$$

LXI. Donc pour l'état fixe de l'air, qui nous ſert de baſe, ayant $g = \gamma$, & $h = b$; nous aurons $M = 1$, & $N = 1$, & partant $L = 1 + \frac{5}{2}\mu$, & $Q = 5 \sin\zeta^2 + \cos\zeta^2$; par conſéquent la réfraction ſera

$$\theta = \frac{-(1+\frac{5}{2}\mu)\sin\zeta\cos\zeta + \sin\zeta\sqrt{[(1+\frac{5}{2}\mu)^2\cos\zeta^2 + 10\mu\sin\zeta^2 + 2\mu\cos\zeta^2]}}{5\sin\zeta^2 + \cos\zeta^2}$$

ou bien

$$\theta = \frac{-(1+\frac{5}{2}\mu)\tang\zeta + \tang\zeta\sqrt{[(1+\frac{5}{2}\mu)^2 + 2\mu + 10\mu\tang\zeta^2]}}{1 + 5\tang\zeta^2}.$$

LXII. Tandisque le terme $10\mu\tang\zeta^2$ eſt beaucoup plus petit que l'unité, à cauſe de $\mu = \frac{1}{3432}$, il ſera aſſés exactement :

$$\theta = \mu\tang\zeta - \tfrac{1}{2}\mu\mu(6 + 5\tang\zeta^2)\tang\zeta.$$

Or lorsque $10\mu\tang\zeta^2$ eſt une quantité extrèmement grande, alors on aura :

$$\theta = \tfrac{1}{5}\sqrt{10\mu} - \frac{1}{5\tang\zeta} + \frac{1}{10\tang\zeta^2\sqrt{10\mu}} - \frac{\mu}{2\tang\zeta}.$$

Mais ſi $10\mu\tang\zeta^2$ eſt un nombre médiocre $= t$, puisque $\tang\zeta^2 = \frac{t}{10\mu} = 343\frac{1}{3}t$, & partant un nombre très grand, nous aurons :

$$\theta = \left(\sqrt{(1+t)} - 1 - \tfrac{5}{2}\mu + \frac{7\mu}{2\sqrt{(1+t)}}\right)\frac{100}{9263\sqrt{t}},$$

& cette formule ſert pour toutes les réfractions médiocres.

LXIII. Pour la réfraction horizontale, où $\zeta = 90$ nous aurons en général $Q = 6M - N$; & partant

$$\theta = N\sqrt{\frac{2\mu}{Q}} = N\sqrt{\frac{2\mu}{6M-N}},$$

d'où

d'où nous tirons pour les cas ſuivans :

	I.	II.	III.	IV.	V.
	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = \frac{6}{5}$	$\frac{g}{\gamma} = \frac{4}{5}$
	$\frac{h}{b} = 1$	$\frac{h}{b} = \frac{6}{5}$	$\frac{h}{b} = \frac{4}{5}$	$\frac{h}{b} = 1$	$\frac{h}{b} = 1$
	$M = 1$	$M = 1$	$M = 1$	$M = \frac{6}{5}$	$M = \frac{4}{5}$
	$N = 1$	$N = \frac{6}{5}$	$N = \frac{4}{5}$	$N = \frac{5}{6}$	$N = \frac{5}{4}$
$6M - N$	$= 5$	$= \frac{24}{5}$	$= \frac{26}{5}$	$= \frac{101}{30}$	$= \frac{71}{20}$
$\theta =$	$37', 6\frac{4}{5}''$	$44', 25\frac{1}{5}''$	$29', 6\frac{4}{5}''$	$27', 24\frac{1}{2}''$	$55', 3\frac{2}{5}''$

LXIV. De là nous voyons, que dans l'état fixe de l'air, qui nous ſert de baſe, où $g = \gamma$, & $h = b$, la parallaxe horizontale eſt de $2227''$: & que, ſi la hauteur du barometre h differe un peu de b, de ſorte que

$h = (1+x)b$, on aura $\theta = 2227 + 2295x - 550xx$.

Or ſi la hauteur du thermometre g différe un peu de γ, de ſorte que

$g = (1+y)\gamma$, on aura $\theta = 2227 - 4148y + 6178yy$.

D'où nous concluons, que lorsqu'il y aura conjointement :

$h = (1+x)b$, & $g = (1+y)\gamma$; la réfraction horizontale ſera

$\theta = 2227 + 2295x - 550xx - 4148y + 6178yy$.

LXV. Ainſi il eſt clair, qu'une plus grande hauteur du barometre augmente la réfraction horizontale : ou qu'une plus grande hauteur du thermometre la diminuë. Donc, puisque la réfraction horizontale ſe trouve ordinairement dans nos contrées de $2000''$, cet état de l'air différe tellement de l'état fixe que

$227 + 2295x - 550xx - 4148y + 6178yy = 0$.

Et

Et partant ſi c'étoit uniquement la hauteur du barometre qui régle cette différence, on auroit $x = -0,0966$; ou ſi cette différence provenoit uniquement du thermometre, on auroit $y = 0,0508$. Mais ſi l'un & l'autre y contribuoit également, de ſorte que $x = -y$, on auroit $x = -0,0363$, & $y = +0,0363$, de ſorte qu'il ſeroit $h = 0,9673\,b$, & $g = 1,0363\gamma$.

LXVI. Conſidérons à préſent auſſi la réfraction à une certaine hauteur, & ſoit la diſtance obſervée au zenith $\zeta = 45°$, de ſorte que $\sin\zeta = \cos\zeta$, & la réfraction qui convient à cette hauteur ſe trouvera

$$\theta = \frac{-(1+3\mu M-\frac{1}{2}\mu N)N+N\sqrt{[(1+3\mu M-\frac{1}{2}\mu N)^2+12\mu M]}}{6M},$$

ou bien aſſés exactement $\theta = \mu N$. Et de là nous aurons pour nos cinq cas conſidérés cy-deſſus

	I.	II.	III.	IV.	V.
	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = 1$	$\frac{g}{\gamma} = \frac{6}{5}$	$\frac{g}{\gamma} = \frac{4}{5}$
	$\frac{h}{b} = 1$	$\frac{h}{b} = \frac{6}{5}$	$\frac{h}{b} = \frac{4}{5}$	$\frac{h}{b} = 1$	$\frac{h}{b} = 1$
$\theta =$	$60'',1$	$72'',1$	$48'',1$	$50'',1$	$75'',1$

LXVII. Donc, ſi la hauteur du barometre h différe tellement de la hauteur fixe b, que $h = (1+x)b$, la réfraction qui répond à la hauteur de 45° ſera $= 60''\frac{1}{10} + 60x$. Or ſi la hauteur du thermometre $g = (1+y)\gamma$, la réfraction ſera $= 60\frac{1}{10} - 62\frac{1}{2}y + 62\frac{1}{2}yy$. Et partant lorsqu'il y aura à la fois $h = (1+x)b$, & $g = (1+y)\gamma$ la réfraction à la hauteur de 45° ſera

$\theta = 60'' + 60x - 62\frac{1}{2}y$, ou bien $= \frac{1+x}{1+y}$ 60 ſecondes.

LXVIII.

LXVIII. Les tables de M. *Caſſini* marquent la réfraction horizontale $= 32', 20'' = 1940''$, & celle qui répond à la hauteur de $45° = 59''$; donc ſuppoſant que ces deux réfractions conviennent au même état de l'air, nous aurons $60 + 60x = 59 + 59y$; ou bien $1 + 60x = 59y$, donc $x = y - \frac{1}{60}y - \frac{1}{60}$: & cette valeur étant ſubſtituée dans l'autre équation horizontale, donnera la valeur de y.

LXIX. Or, puisque $M = 1 + y$, & $N = \frac{1+x}{1+y}$, la réfraction horizontale eſt $= \frac{1+x}{1+y}\sqrt{\frac{2\mu(1+y)}{6(1+y)^2-1-x}}$, & dans le cas $x = 0$, & $y = 0$, elle eſt $\sqrt{\frac{2\mu}{5}} = 2227''$; nous aurons $\sqrt{2\mu} = 2227\sqrt{5}$; donc en général lorsque $h = (1+x)b$, & $g = (1+y)\gamma$, la réfraction horizontale ſera $= 2227.\frac{1+x}{1+y}\sqrt{\frac{5(1+y)}{6(1+y)^2-1-x}}$. Et partant ayant déjà trouvé $1 + x = \frac{88}{88}(1+y)$, nous aurons pour la réfraction horizontale

$$1940 = \tfrac{88}{88}.2227\sqrt{\frac{5}{6(1+y)-\frac{88}{88}}} = 2190\sqrt{\frac{300}{301+360y}};$$

d'où nous tirons $y = 0,2258$, & $x = 0,2054$.

LXX. Donc, pour cet état de l'air, auquel répond la table des réfractions de Mr. *Caſſini*, nous aurons :

la hauteur du barometre $= 1,2054\ b$

la hauteur du thermometre $= 1,2258\ \gamma$

Donc, ſi nous regardons ces deux hauteurs comme connuës, & que nous poſions pour la table des réfractions de Mr. *Caſſini*

la hauteur du barometre $= H$, & du thermometre $= G$, nous en tirerons pour notre état fixe de l'air :

la hauteur du barometre $= \frac{H}{1,2054} = 0,8296\,H$

la hauteur du thermometre $= \frac{G}{1,2258} = 0,8158\,G$

LXXI. Les Tables de *Flamſteed* ſuppoſent la réfraction horizontale de $33' = 1980''$ & celle qui répond à la hauteur de $44°$ ſeulement de $45''$, de ſorte que nous ayons :

$$\frac{1+x}{1+y}\,60 = 48 \;\&\; 2227.\,\frac{1+x}{1+y}\sqrt{\frac{5(1+y)}{6(1+y)^2-1-x}} = 1980$$

Donc, puisque $1+x = \frac{4}{5}(1+y)$, nous aurons :

$\frac{4}{5}.\,2227\sqrt{\frac{25}{26+30y}} = 1980$ ou $y = -0,19209$ & partant $x = -0,35366$: ou bien pour cet état de l'air on aura

la hauteur du barometre $h = 0,64633\,b$

la hauteur du thermometre $g = 0,80701\,\gamma$

de ſorte que cet état de l'air ſeroit extrêmement différent de celui qui répond à la table de Mr. *Caſſini*.

SECONDE HYPOTHESE

où la chaleur de l'air eſt ſuppoſée la même par toute la hauteur de l'atmoſphère.

LXXII. Pour cette hypotheſe poſant

$$M = \frac{g}{\gamma}, \qquad N = \frac{\gamma h}{b g}$$

$$L = \tfrac{3}{2} + 2\mu M - \tfrac{1}{2}\mu N$$

$$Q = \cos\zeta^2 - 4\mu M \sin\zeta^2 - \mu N(\cos\zeta^2 - \sin\zeta^2)$$

la

la réfraction qui répond à la diſtance obſervée du zenith $= \zeta$ ſera

$$\theta = \frac{\mu N L \sin\zeta \cos\zeta - \mu N \sin\zeta \sqrt{(L L \cos\zeta^2 - 2Q)}}{Q}$$

LXX. Donc pour la réfraction horizontale ou $\zeta = 90°$, on aura $Q = -4\mu M + \mu N$: & la réfraction horizontale ſera

$$\theta = \mu N \sqrt{\frac{2}{4\mu M - \mu N}} = N \sqrt{\frac{2\mu}{4M - N}}.$$

Et partant dans notre état fixe de l'air, où $M = 1$ & $N = 1$, la réfraction horizontale ſera $= \sqrt{\frac{2\mu}{3}}$, ou bien de $2875'' = 47', 55''$.

Donc, pour tout autre état de l'air, à cauſe de $\sqrt{2\mu} = 2875\sqrt{3}$, la réfraction horizontale ſera

$$\theta = 2875 N \sqrt{\frac{3}{4M - N}}.$$

LXXIV. Enſuite pour la hauteur obſervée de 45° d'un aſtre, ou $\cos\zeta = \sin\zeta$ & $Q = (1 - 4\mu M)\sin\zeta^2$, la réfraction ſera

$$\theta = \frac{\mu N L - \mu N \sqrt{(L L - 2 + 8\mu M)}}{1 - 4\mu M}$$ ou bien

$$\theta = \frac{\mu N \left(\left[\frac{3}{2} + 2\mu M - \frac{1}{2}\mu N - \sqrt{\left(\frac{1}{4} + 14\mu M - \frac{3}{2}\mu N\right]\right)}\right)}{1 - 4\mu M}$$

& partant $\theta = \frac{\mu N(1 - 12\mu M + \mu N)}{1 - 4\mu M} = \mu N(1 - 8\mu M + \mu N)$

Or pour notre état fixe de l'air cette réfraction devient $= 60''$; & partant dans tout autre état de l'air la réfraction qui répond à la hauteur de 45° ſera $= 60$ N ſecondes.

LXXV. Comparons auſſi avec cette hypotheſe la table des réfractions de M. *Caſſini*, & nous aurons :

$$59 = 60 N \quad \& \quad 1940 = 2875 N \sqrt{\frac{3}{4M - N}}.$$

 donc

donc $N = \frac{59}{60}$ & $1940 = 2827\ V\frac{180}{240M - 59}$.

& partant $M = 1,8383 = \frac{g}{\gamma}$ donc $\frac{h}{b} = MN = 1,8077$.

Or la table des réfractions de *Flamſteed* donne

$$48 = 60N \quad \& \quad 1980 = 2300\ V\frac{15}{20M - 4}$$

d'où nous tirons :

$$N = \tfrac{4}{5} \quad \& \quad M = 1,2119 = \frac{g}{\gamma} \quad \& \quad \frac{h}{b} = 0,9696$$

LXXVI. Notre état fixe de l'air convient donc mieux avec les refractions de *Flamſteed*, qu'avec celles de *Caſſini*, dans cette ſeconde hypotheſe : or le contraire arrive dans la premiere hypotheſe, où l'état de l'air requis pour les réfractions de *Caſſini* approche plus de notre état fixe de l'air, que celui qui répond aux réfractions de *Flamſteed*. D'où il ſemble qu'en Angleterre le degré de chaleur de l'atmoſphère en montant diminuë moins qu'à Paris.

LXXVII. Pour juger mieux de l'état de l'air, qui convient à chaque table des réfractions, poſons en général la réfraction horizontale $= u''$, & celle qui répond à la hauteur de $45° = v''$, & la premiere hypotheſe donnera :

$$2227\ V\frac{5}{6M - N} = u \quad \& \quad 60N = v$$

d'où nous tirons :

$$N = \frac{1}{60}v \quad \& \quad M = 1148\ \frac{vv}{uu} + \frac{v}{360}.$$

Or la ſeconde hypotheſe donne

$$2875N\ V\frac{3}{4M - N} = u \quad \& \quad 60N = v$$

d'où nous tirons :

$$N = \frac{1}{60}v \quad \& \quad M = 1722\ \frac{vv}{uu} + \frac{v}{240}.$$

LXXVIII.

LXXVIII. Si l'une & l'autre hypothese s'écartoit également de la vérité ou auroit pour une hypothese moyenne

$$N = \frac{1}{60} v \quad \& \quad M = 1435 \frac{v v}{u u} + \frac{v}{300}.$$

& partant

$$\frac{g}{\gamma} = 1435 \frac{v v}{u u} + \frac{v}{300} \quad \& \quad \frac{h}{b} = 23 \frac{11}{12} \cdot \frac{v^3}{nu} + \frac{vv}{18000}.$$

Prenons auſſi un milieu entre les tables de *Caſſini* & de *Flamſteed*, & ſoit $u = 1960''$ & $v = 54''$, & nous aurons pour cette hypotheſe moyenne :

$$N = \frac{9}{10} \quad \& \quad M = 1,2688 = \frac{g}{\gamma} \quad \& \quad \frac{h}{b} = 1,1419$$

Donc ordinairement tant la chaleur que l'élaſticité de l'air eſt plus grande, que dans notre état fixe de l'air.

LXXIX. Ramaſſons tout ce qui vient d'être trouvé enſemble, & ſans nous borner à un état d'air déterminé, conſidérons un état de l'air, dont la denſité ſoit telle, que les rayons qui y entrent du vuide ſe rompent ſelon la raiſon 1 à $1 - \mu$. De plus la hauteur du barometre, qui balance le reſſort de cet air, ſoit $= b$, & le degré de chaleur $= c$: & que la denſité de cet air ſoit à celle du vif-argent, comme b à νa où a marque le demi-diametre de la terre. Que cet air donc nous ſerve de baſe fixe, à laquelle nous comparerons tout autre état de l'air, quel qu'il puiſſe être.

LXXX. Pour un état de l'air donc quelconque, où l'Obſervateur ſe trouve, ſoit la hauteur du barometre $= h$, & le degré de chaleur $= g$. Or que cette chaleur décroiſſe en montant, en ſorte qu'elle ſoit réduite à la moitié, à la hauteur $= \frac{1}{\delta} n b$, ou bien à la hauteur $= \frac{\nu}{\delta} a$; où il faut remarquer, que tant μ que ν ſont des fractions très

petites, vû qu'il eſt à peu près $\mu = \frac{1}{3300}$ & $\nu = \frac{1}{860}$: or la lettre δ evanouïra auſſi, lorsque la chaleur demeure la même par toute la hauteur de l'atmoſphère, & elle ne ſauroit ſurpaſſer $\frac{1}{4}$ comme nous avons vu ci-deſſus.

LXXXI. Cela poſé, ſoit pour abréger

$$\left(\frac{3c}{g}-\delta\right)\left(\frac{c}{g}-2\delta\right)+\nu\left(\frac{c}{g}-\delta\right)-\frac{\mu c h}{bg}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2 = P$$

$$\frac{\nu bg}{ch}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)-\mu\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2 = Q$$

$$\frac{b}{h}\left(\frac{c}{g}-3\delta\right)-\mu\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2 = R$$

& à la diſtance obſervée du zenith $= \zeta$ répondra la réfraction ϱ de ſorte que

$$\varrho = -\frac{\frac{1}{2}\mu l^2 \sin\zeta\cos\zeta^2+\frac{1}{2}\mu\sin\zeta\sqrt{\left(PP\cos\zeta^4+\frac{8ch}{bg}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2\left(Q\sin\zeta^2-R\cos\zeta^2\right)\right)}}{Q\sin\zeta^2-R\cos\zeta^2}$$

ou bien

$$\varrho = \frac{1}{2}\mu\,\mathrm{tang}\,\zeta\,\frac{\left(-P+\sqrt{(PP+\frac{8ch}{bg}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2\left(Q\,\mathrm{tang}\,\zeta^2-R\right)}\right)}{Q\,\mathrm{tang}\,\zeta^2-R}$$

LXXXII. Nous aurons donc pour la réfraction horizontale

$$\varrho = \frac{1}{2}\mu\sqrt{\frac{\frac{8ch}{bg}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2}{\frac{\nu bg}{ch}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)-\mu\left(\frac{c}{g}-\delta\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{2\mu\mu ch}{bg}\left(\frac{c}{g}-\delta\right)}{\frac{\nu bg}{ch}-\mu\left(\frac{c}{g}-\delta\right)}},$$

ou bien

$$\varrho = \frac{ch}{bg}\sqrt{\frac{2\mu}{\frac{\nu g}{\mu(c-\delta g)}-\frac{ch}{bg}}},$$

donc

donc ſi $g = c$, & $h = b$, on aura $\varrho = V \frac{2\mu}{\frac{\nu}{\mu(1-\delta)} - 1}$

pour l'état fixe de l'air : ſoit donc pour cet état la réfraction horizontale $= u''$; & pour tout autre état la réfraction horizontale ſera

$$\varrho = \frac{ch}{bg}\, u\, V \frac{\frac{\nu}{\mu(1-\delta)} - 1}{\frac{\nu g}{\mu(c-\delta g)} - \frac{ch}{bg}}$$ ſecondes.

LXXXIII. Or pour la hauteur de 45° la réfraction ſera

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2}\mu\left(-P + V(PP + \frac{8ch}{bg}(\frac{c}{g}-\delta)^2\left(\frac{\nu bg}{ch}(\frac{c}{g}-\delta) - \frac{b}{h}(\frac{c}{g}-3\delta)\right)\right)}{\frac{\nu bg}{ch}(\frac{c}{g}-\delta) - \frac{b}{h}(\frac{c}{g}-3\delta)}$$

d'où l'on tire, en négligeant les petits termes affectés par μ & ν, à moins que $\frac{c}{g} - 3\delta$ ne ſoit une quantité aſſés conſidérable, $\varrho = \frac{\mu ch}{bg}$: or la même valeur réſulte lorsque $\frac{c}{g} - 3\delta = 0$, comme nous avons vu cy-deſſus, de ſorte que la réfraction à la hauteur de 45° ne dépend plus de la quantité δ ; où je remarque qu'il y aura à plus forte raiſon pour les hauteurs obſervées plus grandes $\varrho = \frac{\mu ch}{bg}$ tang ζ ; de ſorte que toutes ces réfractions ne dépendent pas non plus de la quantité δ.

LXXXIV. Lorsque donc l'état de l'air convient avec notre état fixe, la réfraction qui répond à la hauteur de 45° ſera $= \mu$: donc ſi nous poſons cette réfraction $= v''$, pour tout autre état de l'air

la

la réfraction de la hauteur de 45° ſera $\varrho = \frac{c\,h}{b\,g}\,v$ ſecondes : & encore pour des hauteurs plus grandes, ou à la diſtance ζ de zenith, la réfraction ſera $= \frac{c\,h}{b\,g}\,v$ tang ζ ſecond. Or poſant pour abréger le nombre $206265 = i$, ayant $\mu = \frac{v}{i}$, & $\frac{\pi}{i} = V\frac{2\mu\mu(1-\delta)}{v-\mu(1-\delta)}$, on trouvera $v = \frac{2(1-\delta)vv}{\pi\pi} + \frac{(1-\delta)v}{i}$, & $\frac{v}{\mu} = (1-\delta)(1+\frac{2iv}{\pi\pi})$, donc pour tout état de l'air la réfraction horizontale ſera

$$= \frac{c\,h}{b\,g}\,V\,\frac{2iv(\frac{c}{g}-\delta)}{(1-\delta)(1+\frac{2iv}{\pi\pi})-\frac{c\,h}{b\,g}(\frac{c}{g}-\delta)}$$ ſecondes.

LXXXV. On voit donc, que la réfraction ſuit aſſés exactement juſqu'à une diſtance très conſidérable du zenith la raiſon des tangentes de cette diſtance ; & que cette raiſon ne commence à s'éloigner de la vérité, que lorſque μ tang ζ^2 ou v tang ζ^2 devient une quantité aſſés conſidérable : ce qui n'arrive que lorſque tang ζ^2 ſurpaſſe 10, ou bien l'angle ζ même 70 degrés : juſques là on ne risque pas de s'écarter ſenſiblement de la vérité.

LXXXVI. Enſuite on voit auſſi, qu'à moins que l'aſtre ne ſoit trop proche de l'horizon, la réfraction eſt aſſés exactement proportionnelle à la hauteur du barometre; & réciproquement proportionnelle à la hauteur du thermometre, ou plutôt au degré de chaleur. Mais, pour les hauteurs de l'aſtre fort petites, le changement cauſé par le barometre & le thermometre devient plus grand que ſelon leſdites raiſons, & cela ſurtout à l'égard des changemens de la chaleur.

LXXXVII.

LXXXVII. Enfin ſi l'on néglige les petits termes, entant que leur effet ne ſçauroit jamais devenir ſenſible, la réfraction ϱ, qui répond à la diſtance obſervée du zenith $= \zeta$, ſera

$$\varrho = \frac{\mu c h}{b g} \operatorname{tang} \zeta \, .$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{3c}{g}-\delta)(\frac{c}{g}-\delta) - \sqrt{\left(\frac{1}{4}(\frac{3c}{g}-\delta)^2(\frac{c}{g}-2\delta)^2 - \frac{2c}{g}(\frac{c}{g}-\delta)^2(\frac{c}{g}-3\delta) + 2\nu(\frac{c}{g}-\delta)^3 \operatorname{tg}\zeta^2 - \frac{2\mu c h}{bg}(\frac{c}{g}-\delta)^4 \operatorname{tg}\zeta^2\right)}}{\frac{c}{g}(\frac{c}{g}-3\delta) - \nu(\frac{c}{g}-\delta)\operatorname{tang}\zeta^2 + \frac{\mu c h}{bg}(\frac{c}{g}-\delta)^2 \operatorname{tang}\zeta^2}$$

Soit pour abréger $\frac{ch}{bg} = \mathfrak{C}$, & $\frac{c}{g} - \delta = \gamma$, & on aura

$$\varrho = \mu \mathfrak{C} \operatorname{tang} \zeta \frac{\frac{1}{2}(3\gamma+2\delta)(\gamma-\delta) - \sqrt{\left[\frac{1}{4}(3\gamma+2\delta)^2(\gamma-\delta)^2 - 2\gamma\gamma(\gamma+\delta)(\gamma-2\delta) + 2\gamma^3(\nu-\mu\mathfrak{C}\gamma)\operatorname{tg}\zeta^2\right]}}{(\gamma+\delta)(\gamma-2\delta) - \gamma(\nu-\mu\mathfrak{C}\gamma)\operatorname{tang}\zeta^2}$$

LXXXVIII. Pour appliquer cette formule il faut conſidérer trois cas: le premier a lieu lorsque $(\nu-\mu\mathfrak{C}\gamma)\operatorname{tang}\zeta^2$ eſt une quantité extrèmement petite : alors à cauſe de

$$\frac{1}{4}(3\gamma+2\delta)^2(\gamma-\delta)^2 - 2\gamma\gamma(\gamma+\delta)(\gamma-2\delta) = \frac{1}{4}(\gamma\gamma+\gamma\delta+2\delta\delta)^2$$

on aura :

$$\varrho = \mu \mathfrak{C} \operatorname{tang} \zeta \left(1 - \gamma \frac{(\nu-\mu\mathfrak{C}\gamma)\operatorname{tang}\zeta^2}{\gamma\gamma+\gamma\delta+2\delta\delta}\right).$$

LXXXIX. Le ſecond cas a lieu, lorsque le dénominateur $(\gamma+\delta)(\gamma-2\delta) - (\nu-\mu\mathfrak{C}\gamma)\operatorname{tang}\zeta^2$ devient une quantité extrèmement petite ; alors on aura :

$$\varrho = \mu \mathfrak{C} \operatorname{tg} \zeta \left(\frac{2\gamma\gamma}{(3\gamma+2\delta)(\gamma-\delta)} + \frac{4\gamma^4(\gamma+\delta)(\gamma-2\delta) - 4\gamma^5(\nu-\mu\mathfrak{C}\gamma)\operatorname{tg}\zeta^2}{(3\gamma+2\delta)^3(\gamma-\delta)^3}\right)$$

Or lorsque le dénominateur devient une quantité médiocre, aucune approximation n'a lieu, & alors il faut ſe tenir à l'équation principale ; qui poſant

$$\tfrac{1}{2}(3\gamma + 2\delta)(\gamma - \delta) = P \quad \&$$
$$(\gamma + \delta)(\gamma - 2\delta) - \gamma(\nu - \mu\mathfrak{G}\gamma)\,\text{tang}\,\zeta^2 = T$$

devient :

$$\varrho = \mu\mathfrak{G}\,\text{tang}\,\zeta \cdot \frac{P - V(PP - 2\gamma\gamma T)}{T}$$

Et ce cas ſubſiſte tant avant qu'après qu'on parvient au ſecond cas: car avant qu'on y parvienne, T ſera une quantité affirmative, mais après une quantité negative.

XC. Le troiſième cas a enfin lieu lorsque l'angle ζ approche tant de 90°, que même $(\nu - \mu\mathfrak{G}\gamma)\,\text{tang}\,\zeta^2$ devient une quantité très grande: alors on aura aſſés près

$$\varrho = \mu\mathfrak{G}V\frac{2\gamma}{\nu - \mu\mathfrak{G}\gamma} - \frac{\mu\mathfrak{G}(3\gamma\gamma - \gamma\delta - 2\delta\delta)}{2\gamma(\nu - \mu\mathfrak{G}\gamma)\,\text{tang}\,\zeta},$$

de ſorte que la réfraction horizontale ſera $= \mu\mathfrak{G}V\frac{2\gamma}{\nu - \mu\mathfrak{G}\gamma}$: d'où l'on voit que ſi la diſtance obſervée au zenith ζ devient plus grande que de 90°, ce qui peut arriver lorsque l'obſervateur eſt fort élevé, la réfraction ſera encore plus grande que l'horizontale.

XCI. Mais il faut remarquer, qu'il n'eſt pas permis de donner à ζ une valeur trop au deſſus de 90°; car quand même le corps de la terre ne s'oppoſeroit pas au paſſage des rayons, & que tout l'eſpace jusqu'au centre de la terre ne feroit rempli que de l'atmoſphère, l'épaiſſeur de l'air deviendroit trop grande en approchant du centre, & partant les rayons ſouffriroient une trop grande réfraction, pour que notre hypotheſe, où la courbure du rayon a été conſidérée comme infiniment petite, pût avoir lieu.

SUPPLEMENT.

XCII. Si l'on veut regarder l'eſpece de la courbe hyperbolique, que le rayon forme, comme connuë, de ſorte que $dt = -\frac{Edy}{y^m}$ au §. 30; on n'aura pas beſoin du ſecond rayon de courbure, & puisqu'en employant les lettres b, c, g, h, μ, ν, & δ, dont les ſignifications ſont ici expliquées, on aura:

$$D = \frac{\nu b g}{\mu c h\left(\frac{c}{g} - \delta\right)} \quad \& \quad y = \frac{m a D \sin\theta^2 \cos\theta}{\sin\zeta},$$

d'où à cauſe de $y + a\sin(\zeta + \theta) = \alpha^{\frac{-k}{c}} a \sin\zeta$,

vu que $\alpha^{\frac{-k}{c}} = 1 + \frac{(1-\alpha)k}{c} = 1 + \frac{\mu c h}{b g}$, nous aurons:

$$\frac{m D \sin\theta^2 \cos\theta}{\sin\zeta} + \theta\cos\zeta - \tfrac{1}{2}\theta\theta\sin\zeta = \frac{\mu c h}{b g}\sin\zeta, \text{ ou bien}$$

$$\theta\theta = \frac{-2\theta\sin\zeta\cos\zeta + \frac{2\mu c h}{b g}\sin\zeta^2}{2mD - \sin\zeta^2}.$$

XCIII. Donc, ſi la diſtance obſervée du zenith eſt poſée $= \zeta$, & la réfraction qui convient $= \theta$, on aura:

$$\theta = \frac{-\sin\zeta\cos\zeta + \sin\zeta\sqrt{\left(\cos\zeta^2 + \frac{2\mu c h}{b g}(2mD - \sin\zeta^2\right)}}{2mD - \sin\zeta^2}$$

d'où l'on voit que lorsque la diſtance ζ eſt ſi petite que le terme $\cos\zeta^2$ eſt incomparablement plus grand que $\frac{2\mu c h}{b g}(2mD - \sin\zeta^2)$, la réfraction ſera $\theta = \frac{\mu c h}{b g}\tang\zeta$, de ſorte qu'elle ne dépend plus du nombre m ni de δ.

XCIV.

XCIV. Mais, lorsque $\zeta = 90^{\circ}$ on aura pour la réfraction horizontale :

$$\theta = V\frac{2\mu ch}{bg(2mD-1)} = V\frac{2\mu\mu cchh(\frac{c}{g}-\delta)}{2m\nu bbgg-\mu bcgh(\frac{c}{g}-\delta)}.$$

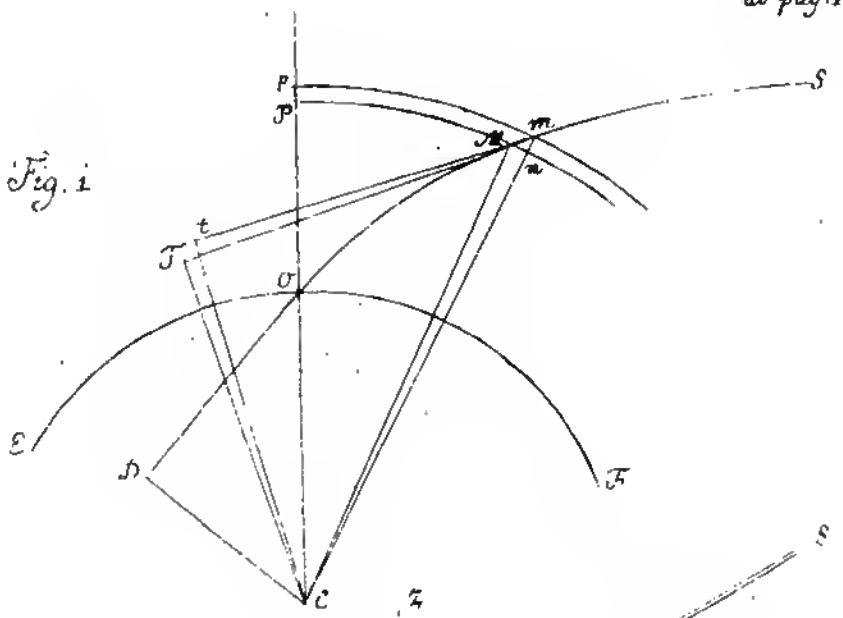
Donc, ſi la courbe du rayon eſt la logarithmique, ou $m = 1$, la réfraction horizontale ſera

$$\theta = \frac{ch}{bg}V\frac{2\mu\mu bg(\frac{c}{g}-\delta)}{2\nu bg-\mu ch(\frac{c}{g}-\delta)}.$$

Elle eſt donc plus petite que par la réſolution précedente. Car elle ſeroit bien la même ſi l'on poſoit $m = \frac{1}{2}$, mais alors la courbe n'auroit plus d'aſymtote, puiſqu'elle deviendroit une parabole. D'où il eſt clair, que l'expoſant m ne ſauroit être pris plus petit que l'unité.

REFLE-

Fig. 1



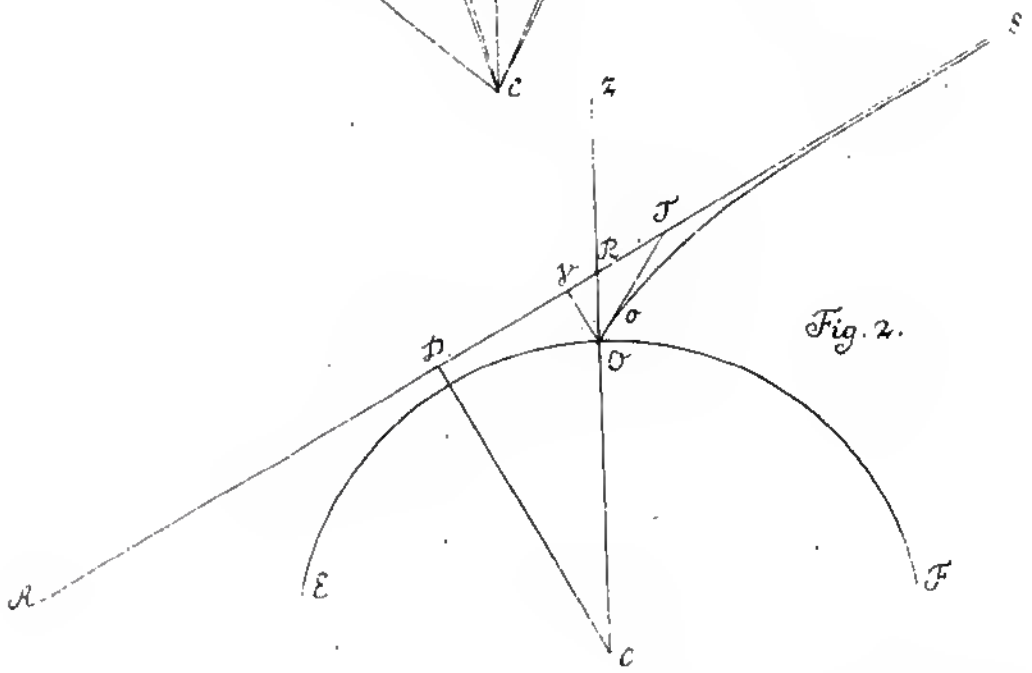


Fig. 2.